Concours A2GPsession 2017

Composition : Mathématiques 5 (algèbre, analyse)

Durée : 3 Heures

EXERCICE I

PARTIE A

Pour tout entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n e^{x^2}$, $x \in IR$

(e désigne l'exponentielle népérienne). On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1-Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes A et B à préciser.

2- On considère l'équation différentielle (E_n) : $y' - 2xy = nx^{n-1}e^{x^2}$

a/ Montrer que f_n est une solution de (E_n).

b/ Intégrer l'équation différentielle (E_n).

PARTIE B

1- a/ Calculer $f_n'(x)$

b/ Montrer que $f_n'(x)$ est du signe de x^{n-1} $\forall n \in IN^*$

2- Etudier suivant la parité de n, le sens de variation de f_n et dresser son tableau de variation.

PARTIE C

On considère la suite (I_n) définie pour $n \in IN^*$ par : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1 a/ Montrer que la fonction F_1 définie par $F_1(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive de f_1 sur IR.

b/ En déduire la valeur de I_1.

c/ Pour tout $n \in IN^*$ et tout réel x, on pose $h_n(x)=x^n$.

Montrer que $(h_{n+1}.F_1)'(x) = f_{n+2}(x) + \frac{n+1}{2}f_n(x)$ où $h_{n+1}.F_1$ désigne le produit des fonctions h_{n+1} et F_1.

d/ En déduire que $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$

e/ Calculer I_3 et I_5

2 a/ Montrer que, $\forall n \in IN^*$, $I_n \geq 0$.

b/ Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c/En déduire que la suite (I_n) est convergente.

EXERCICE II

On veut sommer la série entière suivante : $f(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)(n+1)(n+3)}$

1/ Quel est le développement en série entière de ln(1-x).

(ln désigne la fonction logarithme népérien)

2/Décomposer en éléments simple la fraction suivante : $P(n) = \frac{1}{(n-2)(n+1)(n+3)}$

3/ Sommer les séries entières suivantes : $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)}$; $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+3)}$; $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)}$

4/En déduire f(x).

EXERCICE III

On considère l'espace vectoriel de IR^3 muni de sa base canonique $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3)$ et les endomorphismes f et g de IR^3 dont les matrices respectives sont A et B.

On note $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice associée à g dans la base $\mathcal{B}$

On pose $q(\lambda)=\det(B - \lambda I)$ où I est la matrice unité d'ordre 3 et $E_\lambda=\mathrm{Ker}(g - \lambda i_{dIR^3})$.

(i_{dIR^3} désigne l'application identité de IR^3).

1°/

a) Calculer $q(\lambda)$

b) Montrer que $E_\lambda \neq \{0_{IR^3}\}$ si, et seulement si $\lambda=1$ ou $\lambda=2$.

2°/ Soient $v_1=e_1+e_2-e_3$; $v_2=e_1-e_2$ et $v_3=e_1-e_3$.

a) Montrer que v_1 est une base de E_1 et que (v_2, v_3) est une base de E_2

b) Montrer que $\mathcal{B}'= (v_1, v_2, v_3)$ est une base deIR^3.

c) Déterminer alors la matrice D' de g dans la base $\mathcal{B}'$.

d) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

On considère la matrice Q suivante, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Calculer le produit matriciel PQ et déterminer P^{-1} l'inverse de P.

3°/ On suppose que la matrice A' de f dans $\mathcal{B}$' vérifie l'égalité $D'A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer A', puis la matrice A.

b) Déterminer Ker f et Im f. (Ker f désigne le noyau de l'endomorphisme f et Im f désigne l'image de l'endomorphisme f)

4°) Résoudre le système différentiel linéaire d'ordre 1 noté (S) défini par : $(S):\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + 3z \end{cases}$